

Θεωρία Αποφάσεων Bayes.

Σάββατο 23/11

10:00 το

πρωί

Μάθημα.

$$\frac{f(\theta/x)}{f(\theta)} = \frac{f(x, \theta)}{f(x)} = \frac{\prod_{i=1}^n f(x_i/\theta) f(\theta)}{\int_{\Theta} \prod_{i=1}^n f(x_i/\theta) f(\theta) d\theta}$$

Εκ των υστέρων

Εκ των προτέρων.

Παράδειγμα 1^ο: Έστω τ.μ. X η οποία ακολουθεί $B(n, \theta)$, δοθέντος της τιμής θ της τ.μ. Θ , δηλ. $f(x|\theta) = \binom{n}{x} \theta^x (1-\theta)^{n-x}$ $x=0,1,\dots,n$
 $0 \leq \theta \leq 1$

Αν η τ.μ. Θ έχει εκ των προτέρων κατανομή Βήτα (α, β)

$$\text{δηλ. } f(\theta) = \frac{\theta^{\alpha-1} (1-\theta)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)} \quad 0 \leq \theta \leq 1$$

Να βρεθεί η εκ των υστέρων κατανομή της Θ , δηλ. η $f(\theta/x)$.

ΛΥΣΗ

1^{ος} ΤΡΟΠΟΣ Θα έχουμε ότι $f(\theta/x) = \frac{\frac{\theta^{\alpha-1} (1-\theta)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)} \cdot \binom{n}{x} \theta^x (1-\theta)^{n-x}}{\int_0^1 \frac{\theta^{\alpha-1} (1-\theta)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)} \binom{n}{x} \theta^x (1-\theta)^{n-x} d\theta}$

$$= \frac{\theta^{\alpha+x-1} (1-\theta)^{n+\beta-x-1}}{\int_0^1 \theta^{\alpha+x-1} (1-\theta)^{n+\beta-x-1} d\theta}$$

Γνωρίζουμε ότι αν $h(x) = \sigma \pi \pi \Rightarrow$

$$\begin{aligned} &h(x) \geq 0 \\ &\text{και} \\ &\int_{\pi_0} h(x) dx = 1 \end{aligned}$$

και $B(\alpha, \beta) = \frac{x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)}$

Επομένως $\int_0^1 \theta^{\alpha+x-1} (1-\theta)^{n+\beta-x-1} d\theta = B(\alpha+x, n+\beta-x)$

$\frac{\theta^{\alpha+x-1} (1-\theta)^{n+\beta-x-1}}{B(\alpha+x, n+\beta-x)} d\theta$

σ.π.π. $\int_0^1$

= 1 ως ολοκληρ.
σ.π.π. στο π.ο της

$$\Rightarrow B(\alpha+x, n+\beta-x) = \int_0^1 \theta^{\alpha+x-1} (1-\theta)^{n+\beta-x-1} d\theta$$

οπότε θα είναι $f(\theta/x) = \frac{\theta^{\alpha+x-1} (1-\theta)^{n+\beta-x-1}}{B(\alpha+x, n+\beta-x)}$

άρα $\theta/x \sim \text{Βήτα} (\alpha^* = \alpha+x, \beta^* = n+\beta-x)$ ανανέωση της γνώσης για το θ .

2ος Τρόπος Έχουμε ότι $f(\theta/x) = \frac{\theta^{\alpha+x-1} (1-\theta)^{n+\beta-x-1}}{C}$ $0 \leq \theta \leq 1$

$\uparrow$
σταθερά ως προς θ .

Ο αριθμητής θυμίζει την σ.π.π της βήτα κατανομής, όμως για να είναι σ.π.π θα πρέπει $C = B(\alpha+x, n+\beta-x)$

Επομένως $f(\theta/x) \propto \theta^{\alpha+x-1} (1-\theta)^{n+\beta-x-1}$

$\uparrow$ ΑΝΑΛΟΓΗ

και $f(\theta/x) = \frac{\theta^{(\alpha+x)-1} (1-\theta)^{(n+\beta-x)-1}}{B(\alpha+x, n+\beta-x)}$

Ορισμός: Συζυγής εκ των προτέρων (conjugate prior) θα ονομάζεται η εκ των προτέρων κατανομή του θ , $f(\theta)$ όταν η αντίστοιχη εκ των υστέρων κατανομή $f(\theta/x)$ ανήκει στην ίδια οικογένεια κατανομών.

Παράδειγμα 2: Έστω τ.δ $X_1, \dots, X_n$ από την κατανομή $P(\theta)$, όπου θ είναι η τιμή της τ.μ θ με εκ των προτέρων κατανομή Γάμμα($p, 1/q$)
Να υπολογιστεί η εκ των υστέρων κατανομή της θ , δηλ η $f(\theta/x)$.

ΛΥΣΗ

Γνωρίζουμε ότι $f(x_i/\theta) = \frac{\theta^{x_i} e^{-\theta}}{x_i!}$ $x_i = 0, 1, 2, \dots$ $i = 1(1)n$

και $f(\theta) = \frac{\theta^{p-1} e^{-\theta/q}}{(\frac{1}{q})^p \Gamma(p)}$ $\theta \geq 0$

Επομένως θα είναι:

$$f(\theta/x) = \frac{\frac{\theta^{p-1} e^{-\theta/q}}{(\frac{1}{q})^p \Gamma(p)} \prod_{i=1}^n \frac{\theta^{x_i} e^{-\theta}}{x_i!}}{\int_0^{+\infty} \frac{\theta^{p-1} e^{-\theta/q}}{(\frac{1}{q})^p \Gamma(p)} \prod_{i=1}^n \frac{\theta^{x_i} e^{-\theta}}{x_i!} d\theta} = \frac{\theta^{p-1} e^{-\theta/q} \prod_{i=1}^n \theta^{x_i} e^{-\theta}}{\int_0^{+\infty} \theta^{p-1} e^{-\theta/q} \prod_{i=1}^n (\theta^{x_i} e^{-\theta}) d\theta} =$$

$$= \frac{\theta^{p-1} e^{-\theta/q} \theta^{\sum_{i=1}^n x_i} e^{-n\theta}}{\int_0^{+\infty} \theta^{p-1} e^{-\theta/q} \theta^{\sum_{i=1}^n x_i} e^{-n\theta} d\theta} = \frac{\theta^{(p+\sum x_i)-1} e^{-\theta(n+1/q)}}{\int_0^{+\infty} \theta^{(p+\sum x_i)-1} e^{-\theta(n+1/q)} d\theta} =$$

Γνωρίζουμε ότι για την κατανομή Γάμμα(α, β) ισχύει ότι

στην γάμμα $\equiv \frac{\chi^{\alpha-1} e^{-\chi/\beta}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)}$

οπότε για $\alpha = p + \sum x_i$ $\beta = \frac{1}{n+1/q}$ θα έχουμε

ότι $f(\theta/x) \sim \text{Gamma}(\alpha^*, \beta^*)$

$f(\theta/x) \propto \theta^{(p+\sum x_i)-1} e^{-\theta(n+1/q)}$
ΑΝΑΛΟΓΗ

Παράδειγμα 3 Έστω τ.δ $X_1, X_2, \dots, X_n$ από την ομοιόμορφη κατανομή $U(0, \theta)$ όπου θ είναι η τιμή της τ.μ θ με εκ των προτέρων κατανομή ή την ομοιόμορφη στο $(0, 1)$. Να υπολογισθεί η εκ των υστέρων κατανομή της $\theta: f(\theta/x)$.

ΛΥΣΗ

Γνωρίζουμε ότι $f(x_i|\theta) = \frac{1}{\theta}$, $0 \leq x_i \leq \theta$ $i=1(1)n$

και $f(\theta) = 1$ $0 < \theta < 1$

ΠΑΡΑΤΗΡΟΥΜΕ ΟΤΙ ΤΟ ΠΟ
~~ΕΞΑΡΤΑΙ~~ ΕΞΑΡΤΑΤΑΙ ΑΠΟ ΤΟ θ .

Επομένως για τα άκρα ολοκλήρωσης (του ολοκληρώματος στον παρανομαστή) θα πρέπει να λάβουμε υπόψη μας το σύνολο των περιορισμών για το θ : θα είναι

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq x_1 \leq \theta \\ 0 \leq x_2 \leq \theta \\ \vdots \\ 0 \leq x_n \leq \theta \\ 0 \leq \theta \leq 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \max\{x_1, x_2, \dots, x_n, 0\} \leq \theta \leq 1 \\ \Rightarrow \max\{x_1, \dots, x_n\} \leq \theta \leq 1 \end{array}$$

$\Rightarrow X(n) = \max\{x_1, \dots, x_n\}$ είναι το n -οστό
διατεταγμένο στατιστικό

Έτσι από το Θ. Bayes θα είναι

$$f(\theta/x) = \frac{f(\theta) \prod_{i=1}^n \frac{1}{\theta} \cdot I_{(0,\theta)}(x_i)}{\int_{X(n)} 1 \cdot \prod_{i=1}^n \frac{1}{\theta} I_{(0,\theta)}(x_i) d\theta}$$

όπου $I_A(x) = \text{δείκτης συνολ}$
με $I_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$

$$\Rightarrow f(\theta/x) = \frac{\theta^n}{\int_{X(n)} \theta^n d\theta} = \frac{\theta^n}{\left[\frac{\theta^{-n+1}}{-n+1} \right]_{\theta=X(n)}^{\theta=1}} = \frac{\theta^{-n}}{1-n} (1 - X(n)^{-n+1})$$

$$\Rightarrow f(\theta/x) = \frac{\theta^{-n}}{\frac{1}{n-1} [X(n)^{-n+1} - 1]}$$

$X(n) < \theta < 1$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

1) Όταν το θ είναι φραγμένο από κάτω (από τα x_i) τότε θα πάρω το μέγιστο δηλαδή $x_{(n)} = \max\{x_1, \dots, x_n\}$
η-οστό διατεταγμένο στατιστικό $\leq \theta$

Ενώ αν το θ είναι φραγμένο από πάνω θα χρησιμοποιώ το ελάχιστο, δηλ. $x_{(1)} = \min\{x_1, \dots, x_n\} \geq \theta$

$$\begin{array}{l} \text{πχ για } \theta \leq x_1 \\ \vdots \\ \theta \leq x_n \\ \theta \leq 2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \theta \leq \min\{x_1, \dots, x_n, 2\} \\ \theta \leq \min\{x_{(1)}, 2\} \\ \theta \leq T^* \end{array}$$

2) Όταν το π.ο της X εξαρτάται από το θ , τότε υπολογίζω το ολοκλήρωμα, ενώ όταν το π.ο της X δεν εξαρτάται από το θ δύναμαι, να μην το υπολογίσω, αρμεί να βρω μια γνωστή κατανομή.

Παράδειγμα 4^ο Έστω τ.δ $x_1, \dots, x_n$ από $N(\theta, 1)$, όπου θ η τιμή της τ.μ

θ με εκ των προτέρων κατανομή $N(0, 1)$

Να βρωει η εκ των υστέρων κατανομή.

1^{ος} ΤΡΟΠΟΣ Θα έχουμε ότι $f(\theta/x) = \frac{f(\theta) \prod_{i=1}^n f(x_i/\theta)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(\theta) \prod_{i=1}^n f(x_i/\theta) d\theta} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\theta^2} \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x_i-\theta)^2}}{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\theta^2} \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x_i-\theta)^2} d\theta}$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\theta^2} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2}\sum (x_i-\theta)^2}}{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\theta^2} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2}\sum (x_i-\theta)^2} d\theta} = A$$

Θα γράψουμε τον παρονομαστή

$$A = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^{n+1} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}[\sum x_i^2 - 2\theta \sum x_i + n\theta^2 + \theta^2]} d\theta = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^{n+1} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\sum x_i^2} e^{\theta \sum x_i - \frac{1}{2}(n+1)\theta^2} d\theta$$

$$= \frac{e^{-\frac{1}{2} \sum x_i^2}}{(\sqrt{2n})^{n+1}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2} \left[(\sqrt{n+1} \theta)^2 - 2\sqrt{n+1} \theta \frac{\sum x_i}{\sqrt{n+1}} \right]} d\theta$$

$$\Rightarrow A = \frac{e^{-\frac{1}{2} \sum x_i^2}}{(\sqrt{2n})^{n+1}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2} \left[\sqrt{n+1} \theta - \frac{\sum x_i}{\sqrt{n+1}} \right]^2} \cdot e^{\frac{1}{2} \left(\sum x_i^2 / n+1 \right)} d\theta$$

αλλαγή μεταβλητής $\sqrt{n+1} \theta = z \Rightarrow d\theta = \frac{1}{\sqrt{n+1}} dz$

Επομένως θα είναι:

$$A = \frac{e^{-\frac{1}{2} \sum x_i^2}}{(\sqrt{2n})^{n+1}} \frac{e^{\frac{1}{2} \frac{\sum x_i^2}{n+1}}}{\sqrt{n+1}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2} (z-\alpha)^2} dz}_{= \sqrt{2n}}$$

$$\Rightarrow A = \frac{e^{-\frac{1}{2} \sum x_i^2} e^{\frac{1}{2} \frac{(\sum x_i)^2}{n+1}}}{(\sqrt{2n})^n \sqrt{n+1}}$$

Οπότε θα έχουμε:

$$f(\theta/x) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2n}} e^{-\frac{1}{2} \theta^2} \left(\frac{1}{\sqrt{2n}} \right)^{1/2} e^{-\frac{1}{2} \sum (x_i - \theta)^2}}{\left(\frac{1}{\sqrt{2n}} \right)^n \left(\frac{1}{n+1} \right)^{1/2} e^{-\frac{1}{2} \left(\sum x_i^2 - \frac{n^2 \bar{x}^2}{n+1} \right)}}$$

$$= \left(\frac{n+1}{\sqrt{2n}} \right)^{1/2} e^{-1/2 \left\{ \sum x_i^2 - 2\theta \sum x_i + n\theta^2 + \theta^2 - \sum x_i^2 + \frac{n^2}{n+1} \bar{x}^2 \right\}}$$

$$\Rightarrow f(\theta/x) = \left(\frac{n+1}{\sqrt{2n}} \right)^{1/2} e^{-(n+1)/2 \left\{ \theta^2 - 2\theta \frac{\sum x_i}{n+1} + \frac{n^2}{n+1} \bar{x}^2 \right\}}$$

$$= \left(\frac{n+1}{2n} \right)^{1/2} e^{-\frac{n+1}{2} \left(\theta - \frac{n\bar{x}}{n+1} \right)^2}$$

Επομένως $\theta/x \sim N\left(\frac{n\bar{x}}{n+1}, \frac{1}{n+1}\right)$

Καινού έχει γίνει
λαϊκός $(\sqrt{2n})$?

2ος Τρόπος

Θα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} f(\theta|x) &= \frac{e^{-1/2\theta^2} e^{-\frac{1}{2} \sum (x_i - \theta)^2}}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-1/2\theta^2} e^{-\frac{1}{2} \sum (x_i - \theta)^2} d\theta} = \frac{e^{-\frac{1}{2}\theta^2} e^{-\frac{1}{2} \sum (x_i^2 - 2\theta x_i + \theta^2)}}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\theta^2} e^{-\frac{1}{2} \sum (x_i^2 - 2\theta x_i + \theta^2)} d\theta} \\ &= \frac{e^{-\frac{1}{2}\theta^2} e^{-\frac{1}{2} [\sum x_i^2 - 2\theta \sum x_i + n\theta^2]}}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\theta^2} e^{-\frac{1}{2} [\sum x_i^2 - 2\theta \sum x_i + n\theta^2]} d\theta} = \frac{e^{-\frac{1}{2}\theta^2} e^{\frac{1}{2} 2\theta \sum x_i} \cdot e^{-\frac{n}{2}\theta^2}}{\int_{-\infty}^{+\infty} (e^{-\frac{1}{2}\theta^2} e^{\frac{1}{2} 2\theta \sum x_i} e^{-\frac{n}{2}\theta^2}) d\theta} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(\theta|x) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\theta^2(n+1)} e^{\theta \sum x_i}}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\theta^2(n+1)} e^{\theta \sum x_i} d\theta}$$

Γνωρίζουμε από την $N(\mu, \sigma^2)$ ότι η σφη της είναι

$$\begin{aligned} (2\pi\sigma^2)^{-1/2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\theta - \mu)^2} &= (2\pi\sigma^2)^{-1/2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\theta^2 - 2\theta\mu + \mu^2)} \\ &= \underbrace{(2\pi\sigma^2)^{-1/2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\mu^2}}_{\text{ανεξ του } \theta} \cdot \underbrace{e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\theta^2 - 2\theta\mu)}}_{\text{εξαρτ του } \theta}. \end{aligned}$$

Επομένως για την $f(\theta|x)$ θα έχουμε:

$$f(\theta|x) = \frac{e^{-\frac{1}{2}(n+1)[\theta^2 - 2\theta \cdot (\frac{\sum x_i}{n+1})]}}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(n+1)[\theta^2 - 2\theta \cdot (\frac{\sum x_i}{n+1})]} d\theta}$$

Οπότε για παραμέτρους $\mu = \frac{\sum x_i}{n+1} = \frac{n\bar{x}}{n+1}$ και $\sigma^2 = \frac{1}{n+1}$ θα έχουμε $\theta|x \sim N(\mu, \sigma^2)$ ⑦

Παράδειγμα 5 Έστω X τ.μ με σπη την $f(x|\theta) = e^{-(x-\theta)}$

$0 < \theta < x$ όπου θ είναι η τιμή της τ.μ θ , με εκ των προτέρων

κατανομή: $f(\theta) = 2e^{-2\theta}$, $\theta > 0$. Να βρεθεί η $f(\theta|x)$.

ΛΥΣΗ

Παρατηρούμε ότι το π.ο της X εξαρτάται από το θ . Επομένως κρίνεται αναγκαίος ο υπολογισμός του ολοκλ, θα έχουμε ότι

$$f(\theta|x) = \frac{f(\theta) f(x|\theta)}{\int_0^x f(\theta) f(x|\theta) d\theta} = \frac{2e^{-2\theta} e^{-(x-\theta)}}{\int_0^x 2e^{-2\theta} e^{-(x-\theta)} d\theta}$$

$$= \frac{e^{-\theta} e^{-x}}{\int_0^x e^{-\theta} e^{-x} d\theta} = \frac{e^{-\theta}}{\int_0^x e^{-\theta} d\theta} = \frac{e^{-\theta}}{[-e^{-\theta}]_{\theta=0}^{\theta=x}} = \frac{e^{-\theta}}{-e^{-x} + 1}$$

$$\Rightarrow f(\theta|x) = \frac{e^{-\theta}}{1-e^{-x}} \quad 0 < \theta < x.$$

H/W

ΑΣΚΗΣΗ Να υπολογισθούν οι εκ των προτέρων κατανομές για τις ακόλουθες περιπτώσεις.

σπη

$f(x \theta)$	$f(\theta)$	$f(\theta x)$
τ.μ $X \sim B(n, \theta)$	$f(\theta) = 1 \quad 0 < \theta < 1$	j
α.ν. $X_1, \dots, X_n$ τ.μ $X \sim G(k, 1/\theta)$	$G(p, 1/q)$	j
τ.μ $X \sim \text{Geo}(\theta)$	$\text{Beta}(p, q)$	j
τ.μ $X \sim NB(r, \theta)$	$\text{Beta}(p, q)$	j
α.ν. $X_i \sim N(\theta, 1/\tau)$	$N(b, 1/c)$	

1) $B(n, p) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$

2) $G(a, \beta) = \frac{x^{a-1} e^{-x/\beta}}{\beta^a \Gamma(a)}$

3) $\text{Geo}(p) = p(1-p)^{x-1}$

4) $\text{Beta}(\alpha, \beta) = \frac{x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)}$

$$5) NB(r, p) = \binom{x-1}{r-1} p^r (1-p)^{x-r}$$

$$6) N(\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2n\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2}$$